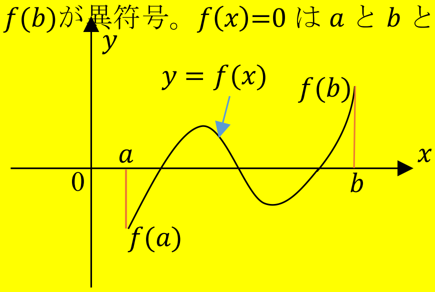
数学Ⅲ　微分・積分　解法のテクニック

1.高次方程式が実数をもつことの証明。

（解法のテクニック）

高次方程式が実数解をもつことの証明。

➡ $f(a)$と $f(b)$が異符号。$f(x)=0$ は a と b との間に少なくとも 1 つの解をもつ



2.数列の極限

（解法のテクニック）

数列の極限

➡ ①分数の形：分母子を分母の最高次で割る。

②無理数の形：有利化を考える。→平方の差を利用。

3. p,q どちらか一方だけが成立することの証明。

（解法のテクニック）

p,q どちらか一方だけが成立することの証明。

➡ p,q どちらも成立すると仮定して矛盾を導く。

かつ，p,q どちらも成立しないと仮定して矛盾を導く。

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x}$

5. 三角関数の近似➡ラジアンにする。

6. 既約分数の分母が２，５以外の素因数をもつ。→循環小数

(例)$\frac{1}{3}, \frac{1}{7}$

7. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(n,k)$ の求め方

$\to \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$ を利用する。

8.シュワルツの不等式$(a<b)$

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)$$

[証明]

任意の実数 t において

$\{tf(x)+g(x)\}^2 \geq \cdots$①

$a<b$ より

$$\int_a^b \{\{tf(x)+g(x)\}\}^2 dx \geq 0$$

$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\, t^2 + 2\int_a^b f(x)g(x)dx\, t + \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \geq 0$

(ⅰ) $\int_a^b \{f(x)\}^2 dx > 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{D}{4}=\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2-\left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)\leq 0$$

$$\therefore \left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)$$

等号成立は $g(x)=0$ のとき

または$\frac{D}{4}=0$ のとき、すなわち

t についての 2 次方程式$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\, t^2 + 2\int_a^b f(x)g(x)dx\, t + \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \cdots$②

が重解を持つとき$\frac{D}{4}=0$ となり等号成立。

(ⅱ) $f(x)=0$ のとき

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0, \int_a^b \{f(x)\}^2 dx=0$$

となり等号成立。

ゆえに

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)$$

等号成立は

$f(x)$ =0,または $g(x)$ =0 または t についての 2 次方程式②が重解を持つとき。