

(問題 1 5 1)

平面上に、1辺の長さが2のひし形OACBがあり、対角線ABの長さは $\sqrt{2}$ である。 t を正の実数とし、線分AC,BCをそれぞれ1: t に内分する点をP,Qとする。また直線AQと直線BPの交点をRとする。

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。
- (2) \overrightarrow{OR} を t, \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。
- (3) 点Aが線分ORを直径とする円の周上にあるとき、 t の値を求めよ。

(問題 1 5 2)

2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ の関して、以下の問いに答えよ。ただし、 x は1ではない実数、 n は自然数とする。

- (1) P の逆行列 P^{-1} を、 x を用いて表せ。
- (2) $B = P^{-1}AP$ を、 x を用いて表せ。
- (3) B の(1,2)成分が0となる x の値を求め、そのときの B^n を求めよ。
- (4) x が(3)の値のとき、 A^n を求めよ。

(問題 1 5 3)

a を実数とし、関数 $f(x) = \sin 2x + 2a(\sin x - \cos x) + a^3$ ($0^\circ \leq x \leq 180^\circ$) を考える。

- (1) $t = \sin x - \cos x$ ($0^\circ \leq x \leq 180^\circ$) とおき、 $f(x)$ を t の関数 $g(t)$ として表せ。

また、 t の範囲を求めよ。

- (2) t が(1)で求めた範囲を動くとき、 $g(t)$ の最大値 $m(a)$ を求めよ。
- (3) 関数 $y = m(a)$ のグラフをかけ。

(問題 1 5 4)

円 $O : x^2 + y^2 = 4$ と点 $P(0, -1)$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 円 O 上を動く点 A に対して、点 P が QA を1:2に内分するような点 Q は1つの円周上を動くことを示し、その円の中心と半径を求めよ。
- (2) 円 O に内接する $\triangle ABC$ の重心が点 P であるとする。点 A の座標が $(2, 0)$ であるとき、直線 BC の方程式を求めよ。

(問題 1 5 5)

空間内に 3 点 $A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3)$ をとる。

- (1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP})$ を満たしながら動くとき、この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。
- (2) (1)における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。
- (3) (1)における P について、四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ。

(問題 1 5 6)

空間の 2 点 P, Q の原点 O を基点とする位置ベクトルが

$$\overrightarrow{OP} = (2\cos t, 2\sin t, 1), \overrightarrow{OQ} = (-\sin 3t, \cos 3t, -1)$$

によって与えられている。ただし、 $-180^\circ \leq t \leq 180^\circ$ とする。

- (1) 点 P と点 Q の距離が最小となる t と、そのときの点 P の座標を求めよ。
- (2) \overrightarrow{OP} と \overrightarrow{OQ} のなす角が 0° 以上 90° 以下となる t の範囲を求めよ。

(問題 1 5 7)

四角形 $ABCD$ を底面とする四角錐 $OABCD$ は $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ を満たしており、 0 と異なる 4 つの実数 p, q, r, s に対して 4 点 P, Q, R, S を $\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ} = q\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OR} = r\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS} = s\overrightarrow{OD}$ によって定める。このとき P, Q, R, S が同一平面上にあれば $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$ が成り立つことを示せ。

(問題 1 5 8)

曲線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + t$ ($-1 < t < 1$) の 2 つの交点を A, B とし、点 $(0, 1)$ を C とする。三角形 ABC の面積の 2 乗を $S(t)$ とおく。

- (1) $S(t)$ を求めよ。
- (2) $S(t)$ の増減を調べ、 $S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

(問題 1 5 9)

関数 $F(x) = \int_0^x (at^2 + bt + c)dt + d$ が $x = -1$ で極大値 $\frac{17}{3}$ をとり、 $x = 3$ で極小値 -5 をとるとき、定数 a, b, c, d の値を求めよ。また $F(x)$ のグラフをかけ。

(問題 1 6 0)

関数 $f(x)$ が等式 $f(x) = x^2 - x \int_0^1 f(t)dt + 2 \int_1^x f'(t)dt$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ は 2 次関数であることを示せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(問題 160)

関数 $f(x)$ が等式 $f(x) = x^2 - x \int_0^1 f(t) dt + 2 \int_1^x f'(t) dt$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

(3) $f(x)$ は 2 次関数であることを示せ。

(4) $f(x)$ を求めよ。