

(問題 40)

xy 平面上の放物線 $A: y = x^2$, $B: y = -(x - a)^2 + b$ は異なる 2 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), (x_1 > x_2)$ で交わるとする。

(1) $x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき、 b を a で表せ。

(2) $x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら、 a, b が変化するとき、直線 PQ の通過する領域を求め図示せよ。

(解答)

$$(1) \begin{cases} y = x^2 \\ y = -(x - a)^2 + b \end{cases}$$

$$x^2 = -(x - a)^2 + b$$

$2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$ この x についての 2 次方程式の 2 解が x_1, x_2 より $x_1 + x_2 = a$,

$$x_1 x_2 = \frac{a^2 - b}{2}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = a^2 - 2(a^2 - b) = -a^2 + 2b \quad \therefore 4 = -a^2 + 2b$$

$$b = \frac{1}{2}a^2 + 2$$

(2) 直線 $PQ: y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$

$$y - x_1^2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$$

$$y - x_1^2 = (x_1 + x_2)(x - x_1)$$

$$y = ax - x_1 x_2$$

$$= ax - \frac{a^2 - b}{2}$$

$$= ax - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{2} + 2 \right)$$

$$4y = 4ax - a^2 + 4$$

(解法のテクニック)

a についての 2 次方程式 $a^2 - 4xa + 4y - 4 = 0$ が実数解をもつ条件

判別式: $D/4 = (2x)^2 - (4y - 4) \geq 0$

ゆえに $y \leq x^2 + 1$

(答え)図の斜線部分(境界線含む。)

