(問題１２７)

A,B は２次の正方行列で $AB=A+B$ を満たす。また E は２次の単位行列である。

(1) $A-E$ は逆行列をもつことを示せ。

(2) 適当な実数α,βを用いて $B=\alpha A+\beta E$ と表せることを示せ。

(解答)

(1)

$$(A-E)(B-E)=AB-A-B+E=E$$

ゆえに $A-E$ の逆行列は $B-E$ である。

(2)

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{とおくと}$$

$$B-E=(A-E)^{-1}=\frac{1}{\Delta(A-E)}\begin{pmatrix} d-1 & -b \\ -c & a-1 \end{pmatrix}$$

$$B=\frac{1}{\Delta(A-E)}\begin{pmatrix} d-1 & -b \\ -c & a-1 \end{pmatrix}+\frac{1}{\Delta(A-E)}\begin{pmatrix} \Delta(A-E) & 0 \\ 0 & \Delta(A-E) \end{pmatrix}$$

$$A-E=\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta(A-E)&=(a-1)(d-1)-bc\\&=ad-a-d-bc+1\end{aligned}$$

(1)より $A-E$ の逆行列は $B-E$ より$\Delta(A-E)\neq 0$

$$B=\frac{1}{\Delta(A-E)}\begin{pmatrix} d-1 & -b \\ -c & a-1 \end{pmatrix}+\frac{1}{\Delta(A-E)}\begin{pmatrix} \Delta(A-E) & 0 \\ 0 & \Delta(A-E) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta(A-E)}\begin{pmatrix} d-1 & -b \\ -c & a-1 \end{pmatrix}+\frac{1}{\Delta(A-E)}\begin{pmatrix} ad-a-d-bc+1 & 0 \\ 0 & ad-a-d-bc+1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta(A-E)}\begin{pmatrix} ad-a-bc & -b \\ -c & ad-d-bc \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta(A-E)}\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}+\frac{1}{\Delta(A-E)}\begin{pmatrix} ad-bc & -0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\Delta(A-E)}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\frac{ad-bc}{\Delta(A-E)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\Delta(A-E)}A+\frac{ad-bc}{\Delta(A-E)}E$$