

(問題 3)

$p$  を素数とする。  $x$  の 2 次方程式  $x^2 + (p^2 - 7p - 2)x + 2p^2 - 15p - 8 = 0$  が整数解をもつとき、  $p$  の値と方程式の解を求めよ。

(解答)

方程式の 2 解を  $\alpha, \beta$  とすると

$$\alpha + \beta = -p^2 + 7p + 2$$

$$\alpha\beta = 2p^2 - 15p - 8$$

この 2 式から

$$(\alpha + 2)(\beta + 2)$$

$$= \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4$$

$$= 2p^2 - 15p - 8 + 2(-p^2 + 7p + 2) + 4 = -p$$

$$\text{ゆえに } (\alpha + 2, \beta + 2) = (-1, p), (1, -p)$$

$$(\alpha, \beta) = (-3, p - 2), (-1, -p - 2)$$

[1]  $x = -3$  を与式に代入して

$$(-3)^2 + (p^2 - 7p - 2)(-3) + 2p^2 - 15p - 8 = 0$$

$$-p^2 + 6p + 7 = 0$$

$$p^2 - 6p - 7 = 0$$

$$(p + 1)(p - 7) = 0$$

$$p \text{ は素数より } p = 7$$

$$\alpha = -3 \text{ のとき } \beta = p - 2 = 7 - 2 = 5$$

[2]  $x = -1$  を与式に代入して

$$(-1)^2 + (p^2 - 7p - 2)(-1) + 2p^2 - 15p - 8 = 0$$

$$p^2 - 8p - 5 = 0$$

この式では、  $p$  は素数解を持たない。

(答え)  $p = 7, x = -3, 5$