(問題１２１)

k を実数とする。x の３次方程式$x^3+(1-k^2)x-k=0$ が虚数解をもつとき

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 方程式の解α，β，γの間に$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$が成立するとき，

αは実数であることを示し，k の値と３次方程式の解を求めよ。

(問題１２２)

x に関する次の２つの２次不等式について，各問いに答えよ。

$$x^2+(1-a^2-b^2)x-(a^2+b^2)<0\cdots①$$

$$\sqrt{2}x^2+\left(a+b-2\sqrt{2}\right)x-2(a+b)>0\cdots②$$

(1) ①を解け。

(2) ②を解け。

(3) ①，②の連立不等式が解をもたないような a，b の値の組を座標とする点(a,b)

の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

(4) で求めた範囲の面積を求めよ。

(問題１２３)

行列 $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と E の実数倍でない行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ がある。実数 p,q が$A^2=pA+qE$ を満たすとき

(1) p,q を a,b,c,d で表せ。

(2) ３以上のある整数 n に対し，$A^n=O$（零行列）となるとき p,q を求めよ。

(3) ３以上のある整数 n に対し，$A^n=A^{n-1}$かつ$A^n\neq O$ となるとき p,q を求めよ。

(問題１２４)

実数 a,b,c の間に $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ の関係があるとき x についての３つの２次方程式は共通解をもつという。その共通解を求めよ。

$$ax^2+bx+c=0,\ bx^2+cx+a=0, cx^2+ax+b=0$$

(問題１２５)

x^{100} を $(x+1)^2$ で割った余りを求めよ。

(問題１２６)

全ての実数 x に対して $\frac{1}{3}<\frac{x^2-px+p^2}{x^2+x+1}<3$ が成り立つときの p の値の範囲を求めよ。

(問題１２７)

A,B は２次の正方行列で $AB=A+B$ を満たす。また E は２次の単位行列である。

(1) $A-E$ は逆行列をもつことを示せ。

(2) 適当な実数 α,β を用いて $B=\alpha A+\beta E$ と表せることを示せ。

(問題１２８)

三角形ＡＢＣにおいて，点Ｂ，Ｃを通る２本の平行線 l,m を引く。ただし点Ａは平行線の間にあるものとする。辺ＢＣ上に任意の点Ｐをとり，ＰからＡＣに平行な直線を引き，l との交点をＱとし，ＰからＡＢに平行な直線を引き，m との交点をＲとする。このときＱ，Ａ，Ｒは一直線上にあることを証明せよ。

(問題１２９)

A を２次の正方行列とする。

(1) $A^2=O$ を満たすとき，A は逆行列をもたないことを示せ。

(2) A が逆行列をもち、$A+A^{-1}=2E$ を満たすとき $A-E$ は逆行列をもたないことを示せ。

(3) A が逆行列をもち，$A^2+(A^2)^{-1}=2E, A^2\neq E$ を満たすとき，$A-E, A+E$ のいずれか一方のみが逆行列をもつことを示せ。

(問題１３０)

2 つの 2 次の正方行列を，$T=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とする。

(1) T^2 を求めよ。

(2) 実数を成分とする 2 次の正方行列 X が $TX=XT$ を満たすとき，実数 x,y を用いて

$X=xT+yE$ と表すことができることを示せ。

(3) 実数を成分とする 2 次の正方行列 X が$X^3=2T$ を満たすとき $TX=$

XT であることを示し、このような X を全て求めよ。