(問題４１)

直線ＡＢと直線ＰＱは円O，O’にそれぞれ点Ａ，Ｂ，Ｐ，Ｑで接している。直 線ＡＢと直線ＰＱの交点をＲとする。円O，O’の半径をそれぞれ$r, r'$ （ただし$r > r'$ ）とする。中 心O，O’間の距離が７で、ＡＢ＝５，ＰＱ＝３であるとき、$r, r'$ の大きさと線分ＡＲ の 長さを求めよ。

(問題４２)

次の２つの条件を同時に満たす△ＡＢＣはどのような三角形か。

$$\begin{cases} \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin B \sin C \\ a\cos B = b\cos A \end{cases}$$

(問題４３)

Oを原点とする座標平面上の４点$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ で条件$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n-1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ $(n = 2,3)$を満たすものを考える。

(1) $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$が曲線$xy = 1$ 上にあるとき，$\mathrm{P}_3$はこの曲線上にはないことを示せ。

(2) $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$が円周$x^2 + y^2 = 1$ 上にあるとき，$\mathrm{P}_4$もこの円周上にあることを示せ。

(問題４４)

数列$\{a_n\}$が次の条件を満たしている。

$$\begin{cases} a_1 = 99900 \\ n \geq 2 \text{ のとき} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n = n^2 a_n \end{cases}$$

このとき、$a_{999}$を求めよ。

(問題４５)

$a, b, c$を実数とする。$y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$と$y = c$のグラフが相異なる３つの交点をもつという。このとき、$a^2 > b$が成立することを示し，更にこれらの交点の$x$座標のすべては$-a - 2\sqrt{a^2 - b} < x < -a + 2\sqrt{a^2 - b}$に含まれていることを示せ。

(問題４６)

放物線$C$: $y = x^2$ 上の点Ａ$(a, a^2)$,B$(b, b^2)$をとる。ただし、$b < 0 < a$とする。

(1) 放物線 $C$の点Ａにおける接線と点Ｂにおける接線の交点の座標を求めよ。

(2) 放物線$C$と直線ＡＢ で囲まれる部分の面積$S$を求めよ。

(3) 三角形ＯＡＢの面積を$R$とするとき、$R/S$ がとり得る値の最大値を求めよ。 ただし、Oは原点である。

(問題４７)
$2x+y=1, x\geq 0, y\geq 0$ のとき
（１）$xy$の最大値，最小値を求めよ
（２）$x^2y^2+4x^2+y^2+3xy$の最大値，最小値を求めよ。

(問題４８)
1〜4 の番号の入った赤玉が 4 個，５〜7 の番号の入った青玉が３個，８〜１２の番号の入った白玉が５個入っている。次の $\square$を整数でうめよ。 どの赤玉も隣り合わないような順列 は$\square!\times{}_{\square}\mathrm{P}_{\square}$通りある。

(問題４９)
「0000」から「9999」までの４桁の電話番号のうち数字 ５ と６の両方を含む番号は何個あるか。

(問題５０)
0, 1, 1 ,2, 2 ,2,3 を用いて作られる７桁の偶数は何通りできるか。 また，７桁の奇数は何通りできるか。