

数学 I 解法のテクニック

1. 対称式：互いに文字を入れ替えても、もとの式と同じになる式。
 a, b, c の対称式が $a + b, b + c, c + a$ のうち一つを因数にもつならば $(a + b)(b + c)(c + a)$ を因数にもつ。
2. 交代式：互いに文字を入れ替えても、符号だけが入れ替わる式
 a, b, c の交代式は $a - b, b - c, c - a$ のうち一つを因数にもつならば $(a - b)(b - c)(c - a)$ を因数にもつ。
3. $x^2 - x + 1 = 0$ ならば $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$ より
 $x^3 = -1$
4. (注意) 不等式 $(x - 1)^2(x - 9) \geq 0$ は $x = 1$ も解である。
5. x, y, z のうち少なくとも1つは1 $\Rightarrow (x - 1)(y - 1)(z - 1) = 0$
6. 2の関数が共通な因数をもつ。→共通因数 $(x - \alpha)$ をもつと置く。
7. 加比の理
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ のとき } \frac{x}{a} = \frac{x+y+z}{a+b+c} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ならば } \frac{a}{b} = \frac{pa+qc}{pb+qd}$$
8. $a > 0, b > 0$ のとき $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
 $a > b > 0$ のとき $\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$
9. $x^n - 1$: n が正の奇数のとき $x - 1$ が因数。正の偶数のときは $x^2 - 1$ が因数。
 $x^n + 1$: n が正の奇数のとき $x + 1$ が因数。
10. $0 < x \leq y$ のとき $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$
11. a が2数 α, β の間にあることの証明。 $\Rightarrow (a - \alpha)(a - \beta) < 0$ を証明すればいい。
12. 方程式が有理数解を持たないことの証明
→有理数解を持つと仮定し代入して矛盾を背理法で導く。
13. 2つの2次方程式 $\begin{cases} f(x, a) = 0 \\ g(x, a) = 0 \end{cases}$ が共通の0でない解をもつとき a の値と共通解を求めよ。
→共通解を α として、 α と a の連立方程式と考える。
14. a, b が異なる。 $\rightarrow a \neq b \rightarrow a - b \neq 0 \rightarrow a - b$ で割れる。
15. ユークリッドの互除法
自然数 a を自然数 b で割ったときの余りを r とすると、 a と b の最大公約数は b と r の最大公約数と一致する。
16. 因数定理を用いて整式の因数を見つけるには
 \pm (定数項の約数) / (最高次の係数の約数) が因数の候補。
17. 三角形の存在条件

$$|b - c| < a < b + c$$

18. n 次以下の整式 $P(x), Q(x)$ について $P(x) = Q(x)$ が異なる $n + 1$ 個の値について成り立つ。
 $\Leftrightarrow P(x) = Q(x)$ は恒等式。
19. $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ ならば, $a = c, b = d$ 。複素数と同じ扱いができる。
20. (注意) 1は素数ではない。
21. 有理係数の n 次方程式が $p + q\sqrt{r}$ を解にもつならば $p - q\sqrt{r}$ も解にもつ。
22. 領域 D における最大, 最小値を求める問題。

(解法のテクニック)

$f(x, y)$ を k とおいて $f(x, y) = k$ が D と共有点をもつような k の範囲を求める。

23. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
 $(x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz$
 $x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2 = (x + y + z)(xy + yz + zx) - 9xyz$
 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$
24. $\sqrt{7}$ が無理数であることの証明。

(解法のテクニック)

$\sqrt{7} = \frac{l}{k}$ (k, l は互いに素) (有理数) と仮定して矛盾を導く。

25. 条件付き最大値, 最小値を求める問題。
 条件式が $f(x, y) = 0$ のとき $g(x, y)$ の最大値, 最小値を求める。

(解法のテクニック)

[解法 1] $f(x, y) = 0$ から y を x で表して $g(x)$ の最大値, 最小値を求める。

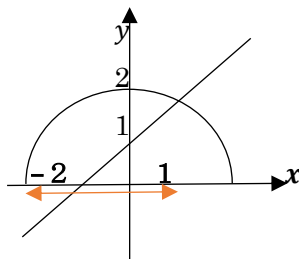
[解法 2] 連立方程式 $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = k \end{cases}$ が実数解をもつ k の最大, 最小を考える。

[解法 3] $f(x, y) = 0$ と $g(x, y) = k$ が共有点をもつ k の値の範囲を求める。

26. 不等式

$$1 + x \leq \sqrt{4 - x^2}$$

(答え) $-2 \leq x \leq 1$



(解法のテクニック)

不等式は図を用いて解くことができる。

27. 関数の最大, 最小を求める問題。

$$y = (x^3 - 3x)^2 - 9(x^3 - 3x) \quad (1 \leq x \leq 4)$$

(解法のテクニック)

$$x^3 - 3x = t \text{ とおく。 } y = t^2 - 9t \quad (-2 \leq t \leq 52)$$