

(問題 1)

実数係数の 2 次方程式  $x^2 + 2(a - 1)x - 2(a - 1) = 0$  が虚数解を持ち、また解の 3 乗がいずれも実数のとき、 $a$  の値を求めよ。

(問題 2)

$x + y + z = 50 \dots \textcircled{1}$ ,  $17x + 6y + 3z = 300 \dots \textcircled{2}$  両式を満たす正の整数の組  $(x, y, z)$  をすべて求めよ。

(問題 3)

$p$  を素数とする。 $x$  の 2 次方程式  $x^2 + (p^2 - 7p - 2)x + p^2 - 15p - 8 = 0$  が整数解をもつとき、 $p$  の値と方程式の解を求めよ。

(問題 4)

(1)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  について、等式  $AB = BA$  が成り立つとき、行列  $A$  の成分の間にはどのような関係があるか。

(2)  $a = \frac{3}{5}$  のとき  $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  を満たす行列  $A$  を求めよ。

(問題 5)

$f(x) = x^4 + (2m - 1)x^3 - (3m - 3)x^2 - (5m + 17)x + (6m + 14)$  について  $f(x) = 0$  の 4 つの解のうち 2 つが等しくなるような  $m$  の値とその解を求めよ。

(問題 6)

連立方程式  $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$  の解  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を求めよ。ただし  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

(問題 7)

整数を係数とする 3 次多項式  $f(x)$  が次の条件を満たしている。

条件：任意の自然数  $n$  に対して、 $f(n)$  は  $n(n + 1)(n + 2)$  で割り切れる。

このときある整数  $a$  があって  $f(x) = ax(x + 1)(x + 2)$  となることを示せ。

(問題 8)

2 次方程式  $x^2 - x - 1 = 0$  の解の一つを  $\alpha$  とするとき  $\alpha^{5800} + \alpha^{1500} + \alpha^{1700} + \alpha^{70}$  の値を求めよ。

(問題 9)

$a, b$  を整数とする  $x^2 + ax + b = 0$  が整数解をもつとき、判別式  $D$  が平方数(整数を二乗した数)であることを示せ。

(問題 10)

(1)  $2ay^2 + (a^3 + 3a + 2)y + a^4 - a^3 - a + 1$  を因数分解せよ。

(2) 4次方程式  $x^4 + (b - 1)x^3 + (2b^2 + 3b - 1)x + 2b + 1 = 0$  が実数解をちょうど1つもつように実数  $b$  を定めよ。