(問題１９１)

(1) $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\dfrac{2x}{\pi} \le \sin x$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 不等式 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-\sin x}dx \le \pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$ が成り立つことを証明せよ。

(問題１９２)

関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+2}$ (a,b,c は定数)が $x=-2$ で極小値 $\dfrac{1}{2}$, $x=1$ で極大値 2 をもつ。
このとき a,b,c の値を求めよ。

(問題１９３)

関数 $f(x)=\dfrac{x}{3x^2+1}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $C: y=f(x)$ に接する直線のうち， y 切片が最大となるものを l とする。曲線 C と直線 l の接点の座標を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 l および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

(問題１９４)

数列 $\{x_i\}$ が次の漸化式を満たしている。 $x_{i+1}=\dfrac{x_i^2+1}{2}(i=1,2,3\cdots)$

(1) 全ての自然数 i に対して $x_{i+1} \ge x_i$ が成立することを示せ。

(2) $|x_i| \le 1$ のとき，全ての自然数 i に対して $x_i \le 1$ であることを示せ。

(3) 自然数 n に対して，等式 $x_{n+1}-x_1=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2$ が成り立つことを示せ。

(4) $|x_i| \le 1$ のとき， $x_{n+1}-x_1=\dfrac{n}{2}(x_n-1)^2$ が成り立つことを示せ。

(5) 初項 x_i の値に応じて数列 $\{x_i\}$ の収束，発散について調べ，収束するときは極限値を求めよ。

(問題１９５)

$k<3$ とする。 $f(x)=\cos 3x+k\cos x+2\sqrt{2}$ とおく。

(1) $t=\cos x$ とおくとき， $g(t)=f(x)$ となるような関数 $g(t)$ を求めよ。

(2) $g(t)$ の $t>0$ における最小値とそのときの t の値を求めよ。

(3) 方程式 $f(x)=0$ が $-\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{3}$ で異なる 4 個の解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(問題１９６)
実数全体で定義された連続な関数 $f(x)$ は

$$f(x)=2x^2-\int_1^x tf(t)dt$$

を満たしている。 $f(x)$ を求めよ。

(問題１９７)
関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x<0, x>2 \\ |1-x| & 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$

(1) $g(x)=f(f(x))$ とおく。関数 $y=g(x)$ のグラフをかけ。

(2) n を自然数とする。 $\displaystyle\int_0^{n^2} g\left(\frac{x^2-n^2+n}{n}\right)\cos\frac{\pi x}{n}dx$ を求めよ。

(問題１９８)

a を実数とする。曲線 $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$ を C , 直線 $y=ax+3a+1$ を l とする。

(1) 直線 l は a によらず定点 P を通る。P の座標を求めよ。
(2) C と l が異なる 2 点を共有するときの a の値の範囲を求めよ。

(問題１９９)

$f(x)=e^{-x}\cos x$ とする。

(1) $e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$ を微分せよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して

$$S_n=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\}$$

とおく。次の式が成り立つことを示せ。

$$S_n<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx<S_n+\frac{1}{n}$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

(問題２００)

n を整数とする。曲線 $y=\dfrac{1}{n^5}(x-n)(2n-x)$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに１回転してできる回転体の体積を V_n とする。

(1) V_n を n を用いて表せ。

(2) $a_n = V_{n+1} + V_{n+2} + V_{n+3} + \cdots + V_{2n}$ とおくとき，$U = \lim_{n\to\infty} a_n$ の値を求めよ。